数理解析研究所講究録
337巻 1978年 222-234

"Oscillating" long-range potential を持つSchrödinger作用素に対するradiation conditionと極限吸収

名工大　望月　清
京工繊大　内山　淳

§1　今迄の結果

$\mathbb{R}^n$（外部領域でもよい）におけるSchrödinger作用素

$$L = -\Delta + V(x)$$

を考える。potential $V(x)$ は実数値函数である。我々の目的は $V(x)$ に制限を加えて L のスペクトルの性質をできるだけ詳しく調べることである。以下問題1〜問題5を考える。

<u>問題1</u>　L はselfadjointか？

<u>今迄の結果</u>　次のことを仮定する。

<u>条件1</u>　ある $\mu > 0$ に対して　$V(x) \in Q_\mu$ (Stummel class) とする。即ち

$$\begin{cases} \sup_{x \in R^n} \int_{|x-y|<1} |x-y|^{-n+4-\mu} |V(y)|^2 dy < +\infty & (n \geq 4) \\ \sup_{x \in R^n} \int_{|x-y|<1} |V(y)|^2 dy < +\infty & (n \leq 3) \end{cases}$$

とする。このとき

$$\begin{cases} \mathcal{D}(L) = H^2(R^n) \\ Lu = -\Delta u + V(x) u \quad \text{for } u \in \mathcal{D}(L) \end{cases}$$

によって Hilbert space $\mathcal{H}=L^2(R^n)$ での Schrödinger 作用素 L を定義すると，L は下に半有界な自己共役作用素となる。

問題2　L の essential spectrum $\sigma_e(L)$ はどうなっているか？

今迄の結果　$V(x)=o(1)$ $(|x|=r\to\infty)$ とすると $\sigma_e(L)=[0,\infty)$.

問題3　L の continuous spectrum $\sigma_c(L)$ と $\sigma_e(L)$ との関係はどうなっているか？

今迄の結果　次のことを仮定する。

条件2　$-\Delta+V(x)$ に対して unique continuation property が成り立つ。

このとき.

(a)　$V(x)=o(r^{-1})$ なら $\sigma_c(L)\supseteqq(0,\infty)$ である。(Kato)

(b)　$V(x)=o(1)$, $\partial_r V(x)=o(r^{-1})$ なら $\sigma_c(L)\supset(0,\infty)$ である。(Odeh)

問題4　L の絶対連続スペクトル $\sigma_{ac}(L)$ と $\sigma_c(L)$ は一致するか？

今迄の結果

(a)　$V(x)=O(r^{-1-\varepsilon})$ $(\varepsilon>0)$ (short-range) のときは肯定的である。(Jäger, Agmon, Kuroda, Saito, Mochizuki).

(b)　$V(x)=O(r^{-\varepsilon})$, $\partial_r V(x)=O(r^{-1-\varepsilon})$ $(\varepsilon>0)$ (non-oscillating long-range) のときも肯定的である。(Ikebe-Saito, Lavine).

問題5　L の絶対連続部分と $L_0=-\Delta$ とは unitary

equivalentか？即ち$\mathcal{H}_{ac}$から$\hat{\mathcal{H}}_0=L^2((0,\infty);L^2(S^{n-1}))$へのunitary operator $\mathcal{F}_\pm$が存在して$\mathcal{F}_\pm L=\lambda\mathcal{F}_\pm$ (diagonalize)となるか？

今迄の結果

(a) $V(x)=O(r^{-1-\varepsilon})$ $(\varepsilon>0)$のときは肯定的である。(Jäger, Agmon, Kuroda, Saito, Mochizuki).

(b) $\nabla^k V(x)=O(r^{-k-\varepsilon})$ $k=0,1,\cdots,m$ ($\varepsilon>\frac{1}{2}$のときは$m=2$, $\frac{1}{2}>\varepsilon>0$のときは$m>\frac{2}{\varepsilon}$)のときも肯定的である。(Ikebe, Saito, Agmon).

§2 oscillating long-range potentialに対する注意

$V(x)=O(r^{-\varepsilon})$, $\nabla V=O(r^{-1-\varepsilon})$, $\cdots$, $\nabla^k V=O(r^{-k-\varepsilon})$ $(\varepsilon>0)$ $(r\to\infty)$

のとき$V(x)$は通常long-range potentialといわれているが，以後これをnon-oscillating long-range potentialと呼ぼう。というのは以下のpotentialは上の仮定をみたさないからである。

$V(x)=(\log r)^{-1}$のときには　$\partial_r V=o(r^{-1})$, $\partial_r^2 V=o(r^{-2})$, $\cdots$, $\partial_r^k V=o(r^{-k})$

であり

$V(x)=\sin(\log r)$のときには．$\partial_r V=O(r^{-1})$, $\partial_r^2 V=O(r^{-2})$, $\cdots$, $\partial_r^k V=O(r^{-k})$

である。また

$V(x)=\dfrac{\sin br}{r}$ ($b\neq 0$は定数)のときには，$\partial_r V=\dfrac{b\cos br}{r}-\dfrac{\sin br}{r^2}=O(r^{-1})$,

$\partial_r^2 V=-\dfrac{b^2\sin br}{r}-\dfrac{2b\cos br}{r^2}+\dfrac{2\sin br}{r^3}=O(r^{-1})$, $\cdots$, $\partial_r^k V=O(r^{-1})$.

である。これらは次の条件をみたすことがわかる。

条件3　$V(x)=O(1)$, $\partial_r V=O(r^{-1})$

条件4　ある定数$a\geq 0$と$\delta_1>0$で$\partial_r^2 V+aV=O(r^{-1-\delta_1})$である。

これらの条件をみたすpotentialをoscillating long-rangeということにする。

§3　問題3に関して

以下の§では条件1と条件2は仮定する。[1]の結果を述べる。条件3のもとでは，

$$E(\gamma)=\frac{1}{\gamma}\limsup_{r\to\infty}\{r\partial_r V(x)+\gamma V(x)\}$$

とおくと　$E(\gamma)<\infty$　である。

<u>Lemma</u>　$E(\gamma)$は$\gamma>0$の単調非増大，連続函数であって，$E(\gamma)\geq\limsup_{r\to\infty}V(x)$である。

<u>Theorem 1</u>　$(-\Delta+V(x)-\lambda)u=0$，$\lambda>E(2)$の解$u\in H^2_{loc}(R^n)$に対し，$\lambda>E(\gamma)\geq E(2)$かつ$\liminf_{r\to\infty} r^{\frac{\gamma}{2}}\int_{|x|=r}(|\partial_r u|^2+|u|^2)dS=0$をみたす$\gamma>0$が存在すれば　$u\equiv 0$　である。

<u>Cor.</u>　$\sigma_c(L)\supset(E(2),\infty)$

<u>Remark</u>　non-oscillating long-range potentialに対しては，すべての$\gamma>0$に対して$E(\gamma)=0$である。よって任意の$\lambda>0$に対してある$\varepsilon>0$で，$\liminf_{r\to\infty} r^{\varepsilon}\int_{|x|=r}\{|\partial_r u|^2+|u|^2\}dS=0$ならば$u\equiv 0$という Agmon, Simon の結果を得る。

<u>Remark</u>　条件3をみたしていなくても，ある$\gamma>0$で$E(\gamma)<\infty$となるpotential（多体問題の場合）に対しては，Theorem 1が適用できる。

§4　問題4に関して

ここでは[2]の結果を述べる。以下では条件3と条件4の他に次のことを仮定する。

<u>条件5</u>　$(\nabla-\tilde{x}\partial_r)V(x)=O(r^{-1-\delta_2})$　$(\delta_2>0,\ \tilde{x}=x/|x|)$

<u>条件6</u>　$(\nabla-\tilde{x}\partial_r)\partial_r V(x)=O(r^{-1-\delta_3})$　$(\delta_3>0)$

$\sigma>0$ に対して

$$\Lambda_\sigma=E(\min\{4\sigma,2\})+\frac{a}{4}$$

とおくと次のことが成り立つ。

<u>Theorem 2</u>　$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}>0$ とおくと　$\sigma_{ac}(L)\supset(\Lambda_\delta,\infty)$ である。

<u>Remark</u>　一般に $\Lambda_\delta\geqq E(2)$ である。また $a=0$ かつ $\delta>1/2$ なら　$\Lambda_\delta=\Lambda_{\frac{1}{2}}=E(2)$ である。

この定理の証明の概要を述べよう。$L=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,d\mathcal{E}(\lambda)$ とすると、$^\forall e\in(E(2),\infty)$ 及び $^\forall f,\ ^\forall g\in\mathcal{H}$ に対し、

$$(\mathcal{E}(e)f,g)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_e(\{R(\lambda+i\varepsilon)f-R(\lambda-i\varepsilon)f\},g)\,d\lambda$$

である。ここで $R(\zeta)=(L-\zeta)^{-1}$ $(\zeta=\lambda\pm i\varepsilon,\ \varepsilon>0)$ である。従って $\mathcal{H}$ で dense な集合に属する f に対して、

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}R(\lambda\pm i\varepsilon)f=R(\lambda\pm i0)f$$

が適当な意味で存在すれば、スペクトルの絶対連続性がわかる。もちろん $\mathcal{H}$ での極限は一般には存在しない。そこで次の weighted L^2-space を導入する。$\nu\in\mathbb{R}^1$ に対し、

$L^2_\nu=\{f\mid(1+r)^\nu f\in\mathcal{H}\}$　とおく。

すると $\nu>0$ に対して $L^2_{-\nu}\supset\mathcal{H}\supset L^2_{\nu}$ で $L^2_{\pm\nu}$ は $\mathcal{H}$ で dense である。今 $f(x)\in L^2_{\frac{1+\beta}{2}}$ が与えられたとき

$$(L-\zeta)u=(-\Delta+V(x)-\zeta)u=f\quad(\zeta=\lambda\pm i\varepsilon,\ \varepsilon\geqq 0)$$

の解 $u=R(\lambda\pm i\varepsilon)f\in L^2_{-\frac{1+\alpha}{2}}$ を求めよう。(但し $\alpha,\beta\geqq 0$)。上の方程式の解の uniqueness を保証するために，通常 radiation condition が置かれる。それを考えるために，上の方程式を次のように変形する。

$$-e^{-\rho}\Delta(e^{\rho}u)+2\nabla\rho\cdot e^{-\rho}\nabla(e^{\rho}u)+(V-\zeta+\Delta\rho-(\nabla\rho)^2)u=f\ 。$$

ここで $\rho=\rho(x,\zeta)$ は複素数値函数である。一般に $\alpha+\beta\leq 2\delta$ なら $u\in L^2_{-\frac{1+\alpha}{2}}$ に対し $O(r^{-1-\delta})u\in L^2_{\frac{1+\beta}{2}}$ が成り立つことに注目して

$$(\star)\quad V-\zeta+\Delta\rho-(\nabla\rho)^2=O(r^{-1-\delta})$$

という方程式を考える。この方程式の解 ρ に対して

$$u\in L^2_{-\frac{1+\alpha}{2}}\ ,\quad \nabla u+(\nabla\rho)u=e^{-\rho}\nabla(e^{\rho}u)\in L^2_{\frac{1+\beta}{2}}$$

が通常の radiation condition であるようである。例えば V が short-range potential のときには，

$$\rho=-i\sqrt{\zeta}\,r+\frac{n-1}{2}\log r\quad(\mathrm{Im}\sqrt{\ }\geqq 0)$$

とおけば

$$\nabla\rho=-i\sqrt{\zeta}\,\tilde{x}+\frac{n-1}{2r}\tilde{x},\quad \Delta\rho-(\nabla\rho)^2-\zeta=\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}$$

だから $(\star)$ をみたす。

また,

$$-2\sqrt{\zeta}\,\partial_r Y + (\nabla Y)^2 + V(x) = O(r^{-1-\delta}) \quad \text{(Eikonal 方程式の一種)}$$

$$\partial_r Y = O(r^{-\delta}),\ \Delta Y = O(r^{-1-\delta})$$

をみたす $Y = Y(x, \zeta)$ に対しては,

$$\rho = -i\sqrt{\zeta}\, r + \frac{n-1}{2}\log r + iY$$

とおけば,

$$\nabla\rho = \left(-i\sqrt{\zeta} + \frac{n-1}{2r}\right)\tilde{x} + i\nabla Y,$$

$$V - \zeta + \Delta\rho - (\nabla\rho)^2 = \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} - 2\sqrt{\zeta}\,\partial_r Y + (\nabla Y)^2 + V + i\left(\Delta Y - \frac{n-1}{r}\partial_r Y\right) = O(r^{-1-\delta})$$

だから、(★)をみたしている。ところで,(★)は

(★★) $V - \zeta + \nabla\cdot\vec{k} - \vec{k}^2 = O(r^{-1-\delta})$

(★★★) $\vec{k} = \nabla\rho$

と同値である。今 $\vec{k} = \tilde{x}k(x, \zeta)$ ($k(x, \zeta)$ は複素数値函数) とおくと,(★★) は次の Riccati 型の方程式になる.

(※) $V - \zeta + \partial_r k + \frac{n-1}{r}k - k^2 = O(r^{-1-\delta})$。

また $(\nabla - \tilde{x}\partial_r)k = O(r^{-1-\delta})$ とすると.

$$\rho = \int^r k(s\tilde{x}, \zeta)\,ds$$

とおけば,

$$\partial_r\rho = k(x, \zeta),\ (\nabla - \tilde{x}\partial_r)\rho = \frac{1}{r}\int^r [(\nabla - \tilde{x}\partial_r)k](s\tilde{x}, \zeta)\, s\,ds = O(r^{-\delta})$$

となり $\vec{k} = \tilde{x}k$ は (★★★) の近似解となる。さて radiation condition と Theorem 1 とを結びつけるために, α, β に制限を加えよう。

以下 $e \Subset (\Lambda_\delta, \infty)$ とし，$\gamma(e)$ を次のように定める。

$$0 < \gamma(e) < \min\{4\delta, 2\} \quad \text{かつ} \quad E(2) \leq E(\gamma(e)) < \min\{\lambda \in e\}。$$

すると $\gamma(e)$ は Th.1 の条件を $^\forall\lambda \in e$ に対してみたしている。今 $\alpha = \alpha(e) > 0$, $\beta = \beta(e) > 0$ を次の条件をみたすようにとる。

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\gamma(e) \leq \beta < 2\delta, & \beta \leq 1 \\ 0 < \alpha \leq 2\delta - \beta, & \alpha \leq \beta \text{。} \end{cases}$$

ここで $\delta > \frac{1}{2}$ のときには $\beta = 1$ と取れ，$\alpha > 0$ も e に indep に取れることを　　注意しておく。

さて，$\zeta = \lambda \pm i\varepsilon$ $(\lambda \in e, \varepsilon \geqq 0)$ に対して

$$\begin{cases} k(x, \zeta) = -i\sqrt{\zeta - \eta V(x)} + \dfrac{n-1}{2r} + \dfrac{-\eta \partial_r V(x)}{4(\zeta - \eta V(x))} \\ \eta = \dfrac{4\zeta}{4\zeta - a} \end{cases}$$

とおくと次のことが成り立つ。

<u>*Lemma*</u>　$K^\pm = \{\lambda \pm i\varepsilon \mid \lambda \in \overline{e}, 0 \leq \varepsilon \leq 1\}$ に対しある $R_1 = R_1(K^\pm) > 0$ が存在して，

(1) $|V - \zeta + \partial_r k + \frac{n-1}{r}k - k^2| \leq C r^{-1-\delta}$

(2) $|k(x, \zeta)| \leq C$

(3) $\mp \mathrm{Im}\, k(x, \zeta) \geqq C$

(4) $\mathrm{Re}\, k(x, \zeta) + \frac{n-1-\beta}{2r} \geqq C r^{-1}$

(5) $|(\nabla - \hat{x}\partial_r) k(x, \zeta)| \leq C r^{-1-\delta}$

が，$(x, \zeta) \in B(R_1) \times K^\pm$ $\left(B(R_1) = \{x \mid |x| > R_1\}\right)$ に対して成り立つ。

ここで次のことを用いている。

Prop. 1　$a>0$ のとき　$V(x)=O(r^{-1})$ である。

さて，radiation condition を定義する。

Definition　$\zeta\in K^{\pm}$ とする。$(-\Delta+V(x)-\zeta)u=f(x)$ の解 $u\in H^2_{loc}$ が radiation condition をみたすとは，

$$u\in L^2_{\frac{1-\alpha}{2}},\quad \partial_r u+k(x,\zeta)u\in L^2_{\frac{1+\beta}{2}}$$

のときをいう。radiation condition をみたす解 u を $\zeta\in K^+$ または $\zeta\in K^-$ に応じて outgoing solution または incoming solution という。

Prop. 2　$\varepsilon>0$ のとき outgoing (incoming) solution は $\mathcal{H}$ に属するから唯一つで $u=R(\lambda\pm i\varepsilon)f$ となる。

Prop. 3　$\varepsilon=0$ のときも outgoing (incoming) solution は高々一つである。

それは $(-\Delta+V(x)-\lambda)u=0$ で u が radiation condition をみたすとすると，β の取り方に注意すれば，

$$\liminf_{r\to\infty} r^{\frac{\gamma(\varepsilon)}{2}}\int_{|x|=r}|u|^2dS\leq C\liminf_{r\to\infty} r^{\beta}\int_{|x|=r}|\partial_r u+ku|^2dS=0$$

となるからである。

Prop. 4 (appriori estimate)　$\zeta\in K^{\pm}$ とし，$(-\Delta+V(x)-\zeta)u=f\in L^2_{\frac{1+\beta}{2}}$ の解 $u\in H^2_{loc}$ は radiation condition をみたすとする。すると

(A) $\|u\|_{\frac{1-\alpha}{2},B(R)}\leq CR^{-\frac{\alpha}{2}}\|f\|_{\frac{1+\beta}{2}}$　$(\forall R>R_1)$

(B) $\|\nabla u+\hat{x}k(x,\zeta)u\|_{\frac{1+\beta}{2},B(R_1)}\leq C\|f\|_{\frac{1+\beta}{2}}$

(c) $\|u\|_{\frac{-1-\alpha}{2}} \leq C\|f\|_{\frac{1+\beta}{2}}$.

Prop.5 (極限吸収) $f\in L^2_{\frac{1+\beta}{2}}$ に対し $u_\pm = R(\lambda\pm i0)f = \underset{\varepsilon\downarrow 0}{s\text{-}\lim} R(\lambda\pm i\varepsilon)f$ in $L^2_{\frac{-1-\alpha}{2}}$ が存在する。

Prop.6 $R(\zeta)f\in L^2_{\frac{-1-\alpha}{2}}$ は $(\zeta, f)\in K^\pm\times L^2_{\frac{1+\beta}{2}}$ に関し連続である。

Prop.7 $f\in L^2_{\frac{1+\beta}{2}}$, $g\in L^2_{\frac{1+\alpha}{2}}$ に対し

$$(E(e)f, g) = \frac{1}{2\pi i}\int_e (\{R(\lambda+i0)f - R(\lambda-i0)f\}, g)d\lambda$$

となる。

これより Th.2 が導かれる。

例

(1) $V(x) = (\log r)^{-1}$ のときには $a=0, \delta=1$ で $E(2)=\Lambda_\delta = 0$ である.

(2) $V(x) = \sin(\log r)$ のときには $a=0, \delta=1$ で $E(2)=\Lambda_\delta = \frac{\sqrt{5}}{2}$ である.

(3) Moses−Tuan の例では $V(x) = \frac{-4k\sin 2kr}{r} + O(r^{-2})$ ($k>0$は定数) である。このとき $\lambda=k^2$ は固有値である。$a=4k^2, \delta=1$ だから $E(2)=4k^2$, $\Lambda_\delta = 5k^2$ となる。

§5 問題5に関して

[3]の結果を述べる。

$\lambda\in e \Subset (\Lambda_\delta, \infty)$ とする。$u\in L^2_{\frac{-1-\alpha}{2}}$ を $f\in L^2_{\frac{1+\beta}{2}}$ に対する outgoing (incoming) solution とする。即ち $u = u(\lambda\pm i0) = R(\lambda\pm i0)f$ である。

Lemma 次の性質をもつ $r_p = r_p(\lambda, f)\longrightarrow\infty$ $(p\to\infty)$ が存在する。

$$\lim_{p\to\infty}\int_{|x|=r_p}\{r^{-\alpha}|u|^2 + r^\beta|\nabla u + \tilde{x}k(x,\lambda\pm i0)u|^2\}dS = 0.$$

<u>Lemma</u>

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\left[R(\lambda+i0)f-R(\lambda-i0)f\right],f\right)=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{\pi}r_p^{n-1}\|(\lambda-\eta V(r_p\cdot))^{\frac{1}{4}}u(r_p\cdot,\lambda\pm i0)\|^2_{L^2(S^{n-1})}.$$

<u>Definition</u>

$$\rho(x,\lambda\pm i0)=\int^r k(s\tilde{x},\lambda\pm i0)ds=\mp i\int^r\sqrt{\lambda-\eta V(s\tilde{x})}\,ds+\frac{n-1}{2}\log r+\frac{1}{4}\log(\lambda-\eta V(x))$$

とおく。

<u>Prop. 8</u> $\frac{1}{2\pi i}\left(\left[R(\lambda+i0)f-R(\lambda-i0)f\right],f\right)=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{\pi}\|e^{\rho(r_p\cdot,\lambda\pm i0)}u(r_p\cdot,\lambda\pm i0)\|^2_{L^2(S^{n-1})}.$

<u>条件7</u>。条件4～条件6において $\delta>\frac{1}{2}$ とする。

<u>Remark</u> $\beta=1$ と取れる。$\alpha>0$ も e に indep. に取れる。$\Lambda_\delta=\Lambda_{\frac{1}{2}}$ である。

<u>Prop. 9</u> $\lambda>\Lambda_{\frac{1}{2}}$ とする。$f\in L^2_1(R^n)$ に対し $\operatorname*{s-lim}_{p\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\rho(r_p\cdot)}u(r_p\cdot)$ in $L^2(S^{n-1})$ が存在し，その極限は $\{r_p\}$ の取り方に依らない。

<u>Definition</u> $\lambda>\Lambda_{\frac{1}{2}}$, $f\in L^2_1$ に対し

$$\mathcal{F}_\pm(\lambda)f=\operatorname*{s-lim}_{p\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\rho(r_p\cdot,\lambda\pm i0)}\left[R(\lambda\pm i0)f\right](r_p\cdot)\quad\text{in } L^2(S^{n-1})$$

とおく。

<u>Lemma</u> $\mathcal{F}_\pm(\lambda)f\in L^2(S^{n-1})$ は $(\lambda,f)\in(\Lambda_{\frac{1}{2}},\infty)\times L^2_1$ に関し連続である。

<u>Definition</u> L^2_1 から $\hat{\mathcal{H}}_{\Lambda_{\frac{1}{2}}}=L^2((\Lambda_{\frac{1}{2}},\infty):L^2(S^{n-1}))$ への作用素 $\mathcal{F}_\pm$ を

$$(\mathcal{F}_\pm f)(\lambda,\cdot)=\left[\mathcal{F}_\pm(\lambda)f\right](\cdot)$$

で定義する。

<u>Theorem 3</u> $\mathcal{F}_\pm$ は $\mathcal{H}$ から $\hat{\mathcal{H}}_{\Lambda_{\frac{1}{2}}}$ への partially isometric operator に unique に拡張できる。その extension を再び $\mathcal{F}_\pm$ と表わすと

$$\|E((\Lambda_{\frac{1}{2}},\infty))f\|=\|\mathcal{F}_\pm f\|_{\hat{\mathcal{H}}_{\Lambda_{\frac{1}{2}}}}$$

である。さらに $\mathcal{F}_\pm L = \lambda \mathcal{F}_\pm$ である。

unitarity を示すために次の仮定を置く。

条件 8　$-r^2\Lambda V(x) \equiv (\nabla - \tilde{x}\partial_r)\cdot(\nabla - \tilde{x}\partial_r)V(x) = O(r^{-1-2\delta_2})$.

Theorem 4　$\tilde{\delta} = \min\{\delta, 2\delta_2 - 1\}$ とおくと

$$\mathcal{F}_\pm \mathcal{E}((\Lambda_{\tilde{\delta}}, \infty))\mathcal{H} = \hat{\mathcal{H}}_{\Lambda_{\tilde{\delta}}} \equiv L^2((\Lambda_{\tilde{\delta}}, \infty) : L^2(S^{n-1})).$$

Cor.　$\delta_2 \geqq \frac{3}{4}$ のときには　$\Lambda_{\tilde{\delta}} = \Lambda_{\frac{1}{2}}$. ($\because\ \tilde{\delta} \geqq \frac{1}{2}$)

Cor.　条件 3 において　$\partial_r V = o(r^{-1})$ とすると　$\Lambda_{\tilde{\delta}} = \Lambda_{\frac{1}{2}} = \limsup_{r\to\infty} V(x) + \frac{a}{4}$.

最後の Cor. においては，任意の $\sigma > 0$ に対して　$E(\sigma) = $

$= \limsup_{r\to\infty} V(x)$ であることに注意すればよい。

§6　non-oscillating long-range potential への適用

Theorem 5　$V(x)$ は次の条件をみたすとする。

(1)　$V(x) = o(1)$，$\partial_r V(x) = o(r^{-1})$，$\partial_r^2 V(x) = O(r^{-1-\delta})$　　$\delta > \frac{1}{2}$

(2)　$(\nabla - \tilde{x}\partial_r)V(x) = O(r^{-1-\delta})$，$(\nabla - \tilde{x}\partial_r)\partial_r V(x) = O(r^{-1-\delta})$

(3)　$(\nabla - \tilde{x}\partial_r)\cdot(\nabla - \tilde{x}\partial_r)V(x) = O(r^{-1-2\delta})$

このとき　$\mathcal{E}((0,\infty))\mathcal{H} = \mathcal{H}_{a.c.}$ から $\hat{\mathcal{H}}_0 \equiv L^2((0,\infty) : L^2(S^{n-1}))$ への

unitary operator $\mathcal{F}_\pm$ が存在して　$\mathcal{F}_\pm L = \lambda \mathcal{F}_\pm$ が成り立つ。

例　$\frac{1}{\log r}$，$\frac{1}{\log(\log r)}$ 等には，Ikebe, Saito 等の結果 ~~は~~ 適用され得ないが，Theorem 5 は適用できる。

Final remark.　Th. 1 の証明，Prop. 4 の証明，Prop. 9 の証明が本質的に重要である。

References

[1] Mochizuki, K. and J. Uchiyama, On eigenvalues in the continuum of 2-body or many-body Schrodinger operators, Nagoya J. Math. 70 (to appear)

[2] ____________, Radiation conditions and spectral theory for 2-body Schrodinger operators with "oscillating" long-range potentials, I. the principle of limiting absorption, J. Math. Kyoto Univ. (to appear)

[3] ____________, Radiation conditions and spectral theory for 2-body Schrodinger operators with "oscillating" long-range potentials, II. spectral representation J. Math. Kyoto Univ. (to appear)